

SKRIPSI

MODEL EPIDEMIK *SIS* DAN *SIR* DENGAN DUA *PATCH*



Aldo Yesaya

NPM: 2016710027

PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
2020



FINAL PROJECT

*SIS* AND *SIR* EPIDEMIC MODELS UNDER TWO PATCH



Aldo Yesaya

NPM: 2016710027

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES  
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY  
2020



# LEMBAR PENGESAHAN

## MODEL EPIDEMIK *SIS* DAN *SIR* DENGAN DUA *PATCH*

Aldo Yesaya

NPM: 2016710027

Bandung, 30 Juli 2020

Menyetujui,

Pembimbing

Iwan Sugiarto, M.Si.

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Liem Chin, M.Si.

Dr. Daniel Salim

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Erwinna Chendra



## PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

### **MODEL EPIDEMIK *SIS* DAN *SIR* DENGAN DUA *PATCH***

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,  
Tanggal 30 Juli 2020

Meterai Rp. 6000
---------------------

Aldo Yesaya  
NPM: 2016710027





## ABSTRAK

Suatu penyakit menular memiliki laju perkembangan yang berbeda-beda, bergantung pada aspek-aspek yang terdapat dalam lingkungan tersebut. Aspek tersebut meliputi iklim, cuaca, dan suhu. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai model epidemik *SIS* (*Susceptible Infected Susceptible*) dan *SIR* (*Susceptible Infected Recovered*) dengan dua *patch*. *Patch* merupakan daerah risiko terinfeksi yang didiami atau ditempati oleh seorang manusia. Dalam kasus model epidemik *SIS* dengan dua *patch*, digunakan terlebih dahulu pendekatan untuk menentukan dan mengukur hubungan untuk model epidemik *n-patch* di dalam suatu lingkungan yang bersifat heterogen. Setelah menentukan pendekatan model epidemik *n-patch*, selanjutnya menentukan model epidemik yang bergantung hanya pada dua *patch*. Dalam kasus model epidemik *SIR* dengan dua *patch* langsung digunakan pendekatan dalam dua *patch*. Dari pendekatan ini, akan ditentukan bentuk dari bilangan reproduksi dasar ( $\mathcal{R}_0$ ) pada model *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch* yang merupakan fungsi dari matriks waktu tinggal  $\mathbb{P}$ . Bilangan reproduksi dasar memiliki peran untuk melihat angka rata-rata kemunculan infeksi baru yang disebabkan oleh penularan dari individu yang terinfeksi dalam suatu populasi. Pada saat model *SIS* dan *SIR n-patch* terhubung dengan kuat, terdapat keseimbangan endemik yang stabil secara global ketika  $\mathcal{R}_0 > 1$  dan keseimbangan bebas penyakit yang stabil secara global ketika  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ . Pada skripsi ini akan diperlihatkan analisis grafik untuk model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch*, dengan asumsi untuk enam peluang kasus tertentu. Lebih lanjut, akan dianalisa dari penyebaran matriks waktu tinggal  $\mathbb{P}$ , yang memiliki efek yang besar pada dinamika penyakit dalam suatu *patch*. Selain itu, pada skripsi ini dapat juga untuk memperumum model endemik dan wabah penyakit lainnya.

**Kata-kata kunci:** Model *SIS*, model *SIR*, *patch*, bilangan reproduksi dasar, matriks waktu tinggal  $\mathbb{P}$ .



## ABSTRACT

An infectious disease has a different rate of development, depending on the aspects contained in the environment. These aspects include climate, weather and temperature. This final project will discuss the *SIS* (Susceptible Infected Susceptible) and *SIR* (Susceptible Infected Recovered) epidemic model under two patch. Patch is an area of risk of infection that is inhabited or occupied by a human. In the case of *SIS* epidemic model under two patch, an approach is used to determine and measure the relationship for the  $n$ -patch epidemic model in a heterogeneous environment. After determining the approach to the  $n$ -patch epidemic model, the next step is to determine an epidemic model that depends on only two patch. Then in the case of the *SIR* epidemic model under two patch, the two patch approach is used. From this approach, we will determine the shape of the basic reproduction number ( $\mathcal{R}_0$ ) in the *SIS* and *SIR* models under two patch which are a function of the  $\mathbb{P}$  residence time matrix. The basic reproduction number has a role to see the average number of new infections that occur due to by transmission from an infected individual in a population. When the *SIS* and *SIR*  $n$ -patch models are strongly connected, there is a globally stable endemic balance when  $\mathcal{R}_0 > 1$  and a globally stable disease-free balance when  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ . This final project will show a graph analysis for the *SIS* and *SIR* epidemic models under two patch, with assumptions for six specific case opportunities. Furthermore, it will be analyzed from the spread of residence time matrix  $\mathbb{P}$ , which has a large effect on disease dynamics in a patch. In addition, this final project can also be used to publicize endemic models and other epidemics.

**Keywords:** *SIS* model, *SIR* model, patch, basic reproduction number, residence times matrix  $\mathbb{P}$ .



*Dedicated to my beloved parents*



## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan atas berkatNya yang melimpah, untuk penyertaan, perlindungan, dan pertolongan yang tak pernah habis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan tepat waktu. Skripsi yang berjudul "Model Epidemik *SIS* dan *SIR* Dengan Dua *Patch*" disusun sebagai salah satu syarat wajib dipenuhi untuk menyelesaikan studi Strata-1, Jurusan Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS), Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR), Bandung. Selama masa kuliah, penulis mendapat banyak hal dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Orang tua dan keluarga yang selalu mendukung penulis dalam segala situasi dan keadaan.
2. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si., selaku Dosen Pembimbing yang telah sabar membimbing penulis, memberikan ilmu, arahan, saran, semangat, dan inspirasi yang bermanfaat sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
3. Anggreni Bella Vista yang selalu memberikan semangat dan masukkan untuk selalu terus belajar, berusaha, dan berjuang dalam pengerjaan skripsi ini.
4. Julius Susanto, Lucas Mangaratua, Rudi, dan Yonathan Budiman sebagai teman kelompok belajar bersama (kobra) dan tempat berbagi satu dengan yang lainnya.
5. Guru sekolah minggu GBKP Bandung Pusat yang tidak pernah berhenti untuk selalu mendoakan permasalahan saya, khususnya dalam proses pengerjaan skripsi.
6. Seluruh dosen FTIS, terima kasih atas segala ilmu dan ajaran yang telah diberikan kepada penulis.
7. Seluruh staf Tata Usaha FTIS, terima kasih atas segala bantuan administrasi selama perkuliahan penulis.
8. Universitas Katolik Parahyangan, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, dan Jurusan Matematika atas segala pengalaman dan kesempatan yang telah diberikan kepada penulis sehingga sangat membuka wawasan, sudut pandang, dan pola pikir penulis dalam proses menjadi manusia yang seutuhnya.
9. Teman-teman angkatan 2016 yang telah mengisi kehidupan perkuliahan dan menginspirasi penulis untuk menjadi pribadi yang lebih baik.
10. Teman-teman matematika 2015, 2017, dan 2018 yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Bandung, Juli 2020

Penulis





# DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xix</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xxi</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	2
1.4 Batasan Masalah . . . . .	2
1.5 Sistematika Penulisan . . . . .	2
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>3</b>
2.1 Persamaan Diferensial . . . . .	3
2.2 Sistem Persamaan Diferensial . . . . .	4
2.3 Kestabilan Titik Keseimbangan . . . . .	4
2.4 Bilangan Reproduksi Dasar dan Matriks Generasi . . . . .	6
2.5 Pelinearan Sistem PD Nonlinear Menggunakan Matriks <i>Jacobian</i> . . . . .	8
<b>3 MODEL EPIDEMIK <i>SIS</i> DAN <i>SIR</i> DENGAN DUA <i>Patch</i></b>	<b>9</b>
3.1 Model <i>SIS</i> dengan <i>n-Patch</i> . . . . .	9
3.2 Model <i>SIS</i> dengan Dua <i>Patch</i> . . . . .	12
3.3 Model <i>SIR</i> dengan Dua <i>Patch</i> . . . . .	15
3.4 Bilangan Reproduksi Dasar . . . . .	16
<b>4 ANALISIS GRAFIK <i>SIS</i> DAN <i>SIR</i> DENGAN DUA <i>Patch</i></b>	<b>21</b>
4.1 Analisis Grafik <i>SIS</i> dengan Dua <i>Patch</i> . . . . .	21
4.2 Analisis Sensitivitas <i>SIS</i> dengan Dua <i>Patch</i> . . . . .	25
4.3 Analisis Grafik <i>SIR</i> dengan Dua <i>Patch</i> . . . . .	27
<b>5 KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>29</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	29
5.2 Saran . . . . .	29
<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>31</b>



## DAFTAR GAMBAR

3.1	Kompartemen Model Epidemik <i>SIS</i> dengan <i>n-Patch</i> . . . . .	10
3.2	Kompartemen Model Epidemik <i>SIR n-Patch</i> . . . . .	16
4.1	Grafik <i>SIS</i> $I_1$ dengan Kasus 1 . . . . .	22
4.2	Grafik <i>SIS</i> $I_2$ dengan Kasus 2 . . . . .	22
4.3	Grafik <i>SIS</i> $I_1$ dengan Kasus 3 . . . . .	23
4.4	Grafik <i>SIS</i> $I_2$ dengan Kasus 4 . . . . .	23
4.5	Grafik <i>SIS</i> $I_1$ dengan Kasus 5 . . . . .	24
4.6	Grafik <i>SIS</i> $I_2$ dengan Kasus 6 . . . . .	24
4.7	Grafik <i>SIS</i> dengan $I_1 + I_2$ . . . . .	25
4.8	Grafik <i>SIS</i> dengan Penurunan Tingkat Risiko Infeksi . . . . .	25
4.9	Grafik <i>SIS</i> dengan Berbagai $\sigma$ . . . . .	26
4.10	Grafik <i>SIS</i> dengan Berbagai $\sigma$ . . . . .	26
4.11	Grafik <i>SIS</i> dengan Berbagai $\sigma$ . . . . .	27
4.12	Grafik <i>SIS</i> dengan Berbagai $\sigma$ . . . . .	27
4.13	Grafik <i>SIR</i> pada $I_1$ . . . . .	28
4.14	Grafik <i>SIR</i> pada $I_2$ . . . . .	28



## DAFTAR TABEL

2.1 Jenis Kestabilan .....	5
----------------------------	---



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Benua yang terdapat di permukaan bumi ini, terbagi atas lima yang di antaranya adalah Benua Asia, Australia, Afrika, Amerika, dan Eropa. Di dalam Benua tersebut terbagi kembali atas puluhan hingga ratusan negara yang memuat di dalamnya. Setiap negara memiliki beberapa kota dan dibagi kembali menjadi beberapa wilayah tertentu. Karena terdapatnya wilayah, kota, dan juga negara, artinya terdapat banyak sekali lokasi di permukaan bumi ini. Di setiap lokasi memiliki perbedaan yang signifikan antara satu dengan yang lain. Perbedaan ini diantaranya adalah iklim, cuaca, dan suhu. Dari perbedaan-perbedaan ini dapat menyebabkan hal yang berbeda pula pada setiap lokasinya, salah satunya adalah perbedaan dalam laju penyakit menular. Penyakit menular dapat dipengaruhi oleh jangka waktu tertentu dan juga lingkungan setempat yang didiami atau ditempati oleh seorang manusia.

Untuk melihat perkembangan dari suatu penyakit menular digunakan dua model matematika. Model pertama adalah model epidemik *SIS* (*Susceptible Infected Susceptible*). Model epidemik *SIS* merupakan model penyebaran penyakit dengan individu yang sehat namun rentan (*susceptible*) terinfeksi suatu penyakit atau terjadi interaksi dengan individu yang sakit (*infected*). Individu yang terinfeksi (*infected*) dapat sembuh melalui pengobatan medis atau proses alam. Setelah sembuh, individu tersebut rentan kembali untuk terinfeksi (*susceptible*). Model kedua adalah model epidemik *SIR* (*Susceptible Infected Recovered*). Model epidemik *SIR* merupakan model penyebaran penyakit dengan individu yang sehat namun rentan (*susceptible*) terinfeksi suatu penyakit atau terjadi interaksi dengan individu yang sakit (*infected*). Individu yang terinfeksi (*infected*) dapat sembuh melalui pengobatan medis atau proses alam. Setelah sembuh, sistem kekebalannya meningkat (*recovered*) dan individu tersebut tidak kembali menjadi rentan untuk terinfeksi (*susceptible*). Lalu dari masing-masing model tersebut digunakan dua *patch*. *Patch* merupakan daerah risiko terinfeksi yang didiami atau ditempati oleh seorang manusia. Contoh dari *patch* diantaranya seperti rumah, bandar udara, kantor, sekolah, dan berbagai tempat umum.

Pada skripsi ini dibentuk model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch* dari suatu penyakit menular. Penggunaan model epidemik *SIS* dan *SIR* ini karena melihat rata-rata yang terjadi di masyarakat. Artinya model epidemik *SIS* dan *SIR* ini, paling sering terjadi di lingkungan masyarakat. Selanjutnya penggunaan dua *patch* bertujuan untuk mengasumsikan bagaimana pergerakan seseorang yang hanya di dua tempat yang berbeda. Karena rata-rata orang bergerak hanya mengunjungi dua tempat. Setelah memahami perkembangan penyebaran penyakit dalam dua *patch*, selanjutnya ditentukan bilangan reproduksi dasar ( $\mathcal{R}_0$ ) untuk *SIS* dengan dua *patch* dan *SIR* dengan dua *patch*. Bentuk bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menggunakan matriks generasi. Bilangan reproduksi dasar bertujuan untuk mengetahui peluang suatu penyakit menjadi wabah. Setelah menemukan bilangan reproduksi dasar, selanjutnya dianalisis pengaruh dari dinamika penyakit terhadap *patch*. Analisis ini diperlihatkan pada skripsi ini dengan asumsi enam peluang kasus tertentu.

## 1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas pada skripsi ini adalah :

1. Bagaimana menentukan model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch*?
2. Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar dari model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch*?
3. Bagaimana analisis grafik dari model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch*?

## 1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Menentukan model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch*.
2. Menentukan bilangan reproduksi dasar dari model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch*.
3. Melakukan analisis grafik dari model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan dua *patch*.

## 1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam skripsi ini model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan laju kelahiran dan kematian yang sama besarnya.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada skripsi ini terdiri dari 5 bab, yaitu :

**Bab 1** : Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

**Bab 2** : Landasan Teori

Bab ini membahas teori-teori yang mendukung dalam pengerjaan skripsi ini. Di antaranya adalah persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, kestabilan titik keseimbangan, bilangan reproduksi dasar, matriks generasi, dan matriks *Jacobian*.

**Bab 3** : Model Epidemik *SIS* dan *SIR* Dengan Dua *Patch*

Bab ini membahas model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan menggunakan dua *patch* dengan mencari terlebih dahulu bilangan reproduksi dasar.

**Bab 4** : Analisis Grafik *SIS* dan *SIR* Dengan Dua *Patch*

Bab ini membahas analisis grafik untuk model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan menggunakan dua *patch*.

**Bab 5** : Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari isi skripsi.