

**SKRIPSI**

**METODE SIMETRI SEBAGAI ALAT BANTU  
PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA**



**Julius Susanto**

**NPM: 2016710021**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
2020**



**FINAL PROJECT**

**SYMMETRY METHOD AS A TOOL TO SOLVE ORDINARY  
DIFFERENTIAL EQUATIONS**



**Julius Susanto**

**NPM: 2016710021**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES  
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY  
2020**



# LEMBAR PENGESAHAN

## METODE SIMETRI SEBAGAI ALAT BANTU PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Julius Susanto

NPM: 2016710021

Bandung, 29 Juli 2020

Menyetujui,

Pembimbing 1

Pembimbing 2

Iwan Sugiarto, M.Si.

Paulus Cahyono Tjiang, Ph.D.

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Taufik Limansyah, M.T.

Livia Owen, M.Si.

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Erwinna Chendra



## **PERNYATAAN**

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

### **METODE SIMETRI SEBAGAI ALAT BANTU PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,  
Tanggal 29 Juli 2020

Meterai Rp. 6000
---------------------

Julius Susanto  
NPM: 2016710021





## ABSTRAK

Persamaan diferensial adalah salah satu alat bantu matematis untuk menggambarkan suatu sistem ilmiah. Dalam sebuah penelitian ilmiah, persamaan diferensial kerap ditemui. Seperti dalam teori kuantum, persamaan diferensial muncul dalam bentuk persamaan Schrödinger. Namun secara analitik, persamaan diferensial kadang kala cukup sulit untuk dipecahkan, tergantung dari kerumitan bentuk persamaan diferensial tersebut. Oleh karena itu, sebagian besar metode penyelesaian persamaan diferensial, digolongkan berdasarkan bentuk persamaan diferensialnya, seperti persamaan diferensial variabel terpisah, persamaan diferensial Bernoulli, persamaan diferensial linear, persamaan diferensial homogen, persamaan diferensial eksak, persamaan diferensial Riccati, dan persamaan diferensial Sturm-Liouville. Pada skripsi ini akan diperkenalkan metode simetri untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial biasa tanpa bergantung pada bentuk persamaan diferensialnya. Metode ini mirip dengan metode substitusi. Keunggulan dari metode simetri adalah dapat memberikan persamaan kriteria. Persamaan kriteria ini berguna untuk membuat koordinat baru yang akan membuat persamaan diferensial pada koordinat tersebut mudah untuk dikerjakan. Koordinat baru tersebut adalah koordinat kanonikal. Pada koordinat ini, persamaan diferensial biasa orde satu memiliki bentuk variabel terpisah. Sedangkan untuk persamaan diferensial biasa berorde lebih dari satu, persamaan diferensial tersebut dapat diturunkan ordenya. Oleh karena itu, dasar dari metode simetri adalah membuat persamaan diferensial biasa menjadi tidak bergantung kepada variabel  $y$ . Metode penyelesaian inilah yang akan dibahas pada skripsi ini. Selain itu juga, akan dibahas metode penyelesaian persamaan diferensial linear, persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial eksak yang sudah dipelajari dilihat dari perspektif metode simetri.

**Kata-kata kunci:** Metode Simetri, Persamaan Diferensial Biasa, Reduksi Orde, Persamaan Kriteria



## ABSTRACT

Differential equations are one of the mathematical tools for describing a scientific system. In a scientific study, differential equations are often encountered. For instance, in a quantum theory, differential equation appears in the form of Schrödinger's equation. But analytically, differential equations are sometimes quite difficult to solve, depending on the complexity of the form of the differential equation. Therefore, most methods of solving differential equations, are classified according to the form of differential equations, such as differential equations with separated variables, Bernoulli differential equations, linear differential equations, homogeneous differential equations, exact differential equations, Riccati differential equations, and Sturm-Liouville differential equations. This thesis will introduce symmetry methods to solve ordinary differential equation problems without depending on the form of differential equations. This method is similar to the substitution method. The advantage of the symmetry method is that it can provide the criterion equations. This criterion equation is useful for creating new coordinates that will make the differential equations in these coordinates easy to work on. The new coordinates are canonical coordinates. At these coordinates, ordinary first order differential equations have the form of separated variables. As for ordinary high order differential equations, the differential equation can reduce the order. Therefore, the idea of the symmetry method is to make ordinary differential equations become independent of variables  $y$ . This method will be discussed in this thesis. Moreover, we will discuss methods of solving linear differential equations, homogeneous differential equations and exact differential equations from the perspective of the symmetry method.

**Keywords:** Symmetry Method, Ordinary Differential Equations, Reduction Order, Criterion Equations



*Kepada keluarga tercinta dan seluruh teman sejawat.*



## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa. Berkat kasih dan rahmatnya, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Metode Simetri Sebagai Alat Bantu Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa*.

Maksud dan tujuan penulisan skripsi ini adalah memenuhi salah satu syarat akademik dalam menyelesaikan studi tingkat S-1 di Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan. Penulis mengakui banyak kendala dalam penusunan skripsi ini. Berkat bantuan, dukungan, masukan, bimbingan, dan dorongan motivasi dari berbagai pihak, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis baik langsung maupun tidak langsung, dan secara spesifik kepada :

1. Orang tua penulis Dedi Susanto dan Julianawati Sutojo yang selalu mendoakan, memberi dukungan baik secara morel dan materi.
2. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. dan Bapak Paulus Cahyono Tjiang, Ph.D., selaku dosen pembimbing atas bimbingan, masukan, saran, dan ulasan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Taufik Limansyah, M.T.dan Ibu Livia Owen, M.Si., selaku dosen penguji yang sudah menilai dan memberikan ulasan serta masukan untuk skripsi dan video presentasi skripsi agar penulis dapat meningkatkan skripsi ini.
4. Adik penulis Alroy Yohanes Susanto, Michael Yohanes Susanto, dan Felix Evander Susanto yang memberikan waktu dan ruang untuk membuat video presentasi skripsi.
5. Rudi, Lucas Mangaratua, Aldo Yesaya, dan Yonathan Budiman selaku teman kelompok belajar bersama (kobra) atas pengalaman bermain sambil belajar sepanjang perkuliahan.
6. Widhiya Nurqisthina Fadila yang selalu memberikan dorongan untuk terus belajar dan selalu menemani dalam hampir semua mata kuliah yang penulis ambil, terutama yang mendukung skripsi ini.
7. Bapak Liem Chin, M.Si.selaku dosen mata kuliah skripsi atas segala bantuan yang diberikan.
8. Seluruh dosen FTIS, terutama dosen Program Studi Matematika serta dosen fisika Bapak Paulus Cahyono Tjiang, Ph.D., Bapak Dr. Aloysius Rusli, Bapak Philips Nicolas Gunawidjaja, Ph.D., dan Ibu Flaviana, M.T., selaku dosen pengajar mata kuliah yang ditempuh oleh penulis atas ilmu dan dedikasinya kepada penulis.
9. Seluruh staf Tata Usaha FTIS dan karyawan FTIS atas segala kerja kerasnya demi melancarkan perkuliahan penulis.
10. Seluruh teman angkatan 2018 yang tidak bisa disebutkan satu per satu, atas pengalaman, dan bantuan yang tidak terlupakan selama perkuliahan dan penyusunan skripsi.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari kata sempurna mengingat waktu dan kemampuan penulis. Oleh karena itu, penulis menerima saran dan kritik yang membangun dari para pembaca

agar lebih baik untuk kedepannya. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini tidak bermanfaat bagi penulis saja, melainkan dapat berguna juga bagi para pembaca sekalian

Bandung, Juli 2020

Penulis



# DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xix</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xxi</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	2
1.4 Batasan Masalah . . . . .	2
1.5 Sistematika Pembahasan . . . . .	2
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>3</b>
2.1 Fungsi Simetri dan Grup . . . . .	3
2.2 Simetri kontinu (Grup Lie) . . . . .	4
2.2.1 Generator . . . . .	6
<b>3 MEKANISME METODE SIMETRI</b>	<b>9</b>
3.1 Linearisasi Fungsi Simetri Persamaan Diferensial Biasa . . . . .	9
3.1.1 Linearisasi fungsi simetri persamaan diferensial biasa orde 1 . . . . .	10
3.1.2 Linearisasi fungsi simetri persamaan diferensial biasa orde tinggi . . . . .	12
3.2 Koordinat Kanonikal . . . . .	14
<b>4 METODE STANDAR PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE SATU DARI PERSPEKTIF METODE SIMETRI</b>	<b>21</b>
4.1 Persamaan Linear. . . . .	21
4.2 Persamaan Homogen. . . . .	22
4.3 Persamaan Eksak . . . . .	23
<b>5 KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>27</b>
5.1 Kesimpulan Metode Simetri . . . . .	27
5.2 Saran Untuk Penelitian Lebih Lanjut . . . . .	28
<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>29</b>



## DAFTAR GAMBAR

2.1 Permukaan $z = x^2 + y^2$ .....	4
-------------------------------------	---



## DAFTAR TABEL

2.1	Tabel Cayley Fungsi Simetri Segitiga Sama Sisi . . . . .	3
-----	--	---



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan salah satu alat untuk menggambarkan sistem fisis dari suatu percobaan ilmiah. Contohnya dalam percobaan fisika, terdapat dua persamaan terkenal untuk menggambarkan suatu sistem dari suatu benda ilmiah, yakni persamaan Hamilton dan persamaan Schrödinger, yang masing-masing dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial. Oleh karena itu, dibutuhkan sebuah cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial agar kita dapat mengetahui hubungan didalam sistem yang diamati. Secara umum ada dua cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial, yaitu dengan metode numerik dan dengan metode analitik. Hampir semua persamaan diferensial dapat dicari solusinya dengan menggunakan metode numerik. Sayangnya solusi yang dihasilkan merupakan hampiran belaka. Ada beberapa cabang ilmiah yang membutuhkan keakuratan tinggi sehingga metode numerik sulit untuk memenuhi kriteria keakuratan yang diinginkan. Sebaliknya metode analitik memiliki keakuratan yang sangat baik bahkan solusi ini dapat dikatakan solusi akhir atau nilai sejati atau nilai eksak. Kekurangan metode analitik adalah sulitnya mendapatkan solusi karena keterbatasan metode yang dimiliki, dan ada tidaknya solusi dalam bentuk tertutup. Secara umum metode analitik selalu dibagi berdasarkan bentuk persamaan diferensial. Sekalipun ada metode khusus yang dapat digunakan, namun tidak jarang untuk mencari solusinya cukup sulit untuk dikerjakan.

Bentuk-bentuk diferensial biasa yang cukup terkenal antara lain persamaan variabel terpisah, persamaan eksak, persamaan homogen, persamaan linear, persamaan Riccati, dan persamaan Sturm-Liouville. Dari persamaan-persamaan ini, persamaan variabel terpisah adalah persamaan yang paling mudah untuk dikerjakan. Namun muncul pertanyaan, "adakah metode untuk membuat persamaan diferensial menjadi bentuk variabel terpisah?". Ternyata metode itu ada, metode itu adalah metode simetri. Ide utama dari metode simetri adalah mencari transformasi yang mempertahankan bentuk persamaan diferensial, transformasi ini disebut fungsi simetri. Setelah transformasi bidang didapatkan, akan dicari medan vektor dari orbit (Pengertian orbit akan dibahas pada subbab 2.2) fungsi simetri. Hal ini bertujuan untuk mencari transformasi koordinat yang memiliki fungsi simetri translasi. Hal ini dikarenakan terdapat sebuah lemma yang mengatakan jika suatu persamaan diferensial biasa orde 1 memiliki fungsi simetri translasi pada salah satu variabel ( $x$  ataupun  $y$ ), maka persamaan diferensial tidak memuat variabel tersebut. Sayangnya persamaan ini tidak bisa diselesaikan secara umum, hanya bisa ditebak dari persamaan kriteria. Walaupun begitu metode ini cukup membantu terlebih jika fungsi simetrinya sudah diketahui.

Pada skripsi ini akan dibahas apa itu simetri, fungsi simetri dan metode simetri. Selain itu juga akan dibahas bagaimana mencari persamaan kriteria untuk memilih transformasi bidang sehingga persamaan diferensial pada bidang yang baru memiliki fungsi simetri translasi, khususnya pada persamaan diferensial biasa. Untuk menutup skripsi ini akan dibahas metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde satu, persamaan diferensial homogen, dan persamaan diferensial eksak dari sudut pandang metode simetri.

## 1.2 Rumusan Masalah

Ada beberapa masalah yang akan dibahas pada skripsi ini, yakni :

1. Bagaimana cara menentukan persamaan kriteria pada metode simetri untuk persamaan diferensial biasa?
2. Bagaimana metode penyelesaian persamaan diferensial biasa orde 1 dilihat dari sudut pandang metode simetri?

## 1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. Mempelajari metode simetri sebagai metode baru untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (metode simetri).
2. Melihat metode penyelesaian persamaan diferensial biasa orde 1 yang sudah diketahui dari sudut pandang metode simetri.

## 1.4 Batasan Masalah

Terdapat beberapa batasan dalam penulisan skripsi :

1. Persamaan diferensial yang dibahas hanyalah persamaan diferensial biasa.
2. Contoh yang digunakan pada skripsi ini sebatas pada persamaan diferensial biasa orde satu dan dua.
3. fungsi simetri (grup Lie) akan dibahas dari sudut pandang kalkulus peubah banyak bukan dari sudut pandang aljabar.

## 1.5 Sistematika Pembahasan

Sistematika penulisan skripsi ini terdiri dari 4 bab dan setiap bab akan membahas tentang :

1. Bab 1: Pendahuluan  
Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, dan sistematika pembahasan skripsi ini.
2. Bab 2: Landasan Teori  
Bab ini berisikan pengertian dasar tentang apa itu simetri, grup kontinu dan medan vektor orbit fungsi simetri (generator).
3. Bab 3: Mekanisme Metode Simetri  
Bab ini berisikan bagaimana cara kerja metode simetri dan bagaimana cara mencari persamaan kriteria untuk persamaan diferensial biasa.
4. Bab 4: Metode Standar Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu Dari Perspektif Metode Simetri  
Bab ini berisikan metode pemecahan persamaan diferensial orde 1 yang sudah diketahui namun dilihat dari sudut pandang metode simetri.
5. Bab 5: Kesimpulan dan Saran  
Bab ini berisikan tentang kesimpulan dari metode simetri sebagai alat bantu penyelesaian persamaan diferensial biasa, dan juga saran penggunaan metode simetri.