# BAB 5

# KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan Metode Simetri

Kita sudah membahas metode simetri yang dimulai dari definisi simetri, fungsi simetri, orbit, vektor singgung, generator, dan mekanisme dari metode simetri. Secara garis besar metode simetri adalah sebuah metode transformasi koordinat yang berdampak pada fungsi simetri persamaan diferensial. Metode ini ingin membuat suatu koordinat yang pada koordinat tersebut persamaan difererensial memiliki fungsi simetri pergeseran pada variabel dependen. Hal ini dapat dicapai dengan tahapan

1. Membuat persamaan kriteria untuk persamaan diferensial. (Pastikan orde dari persamaan diferensial cocok dengan persamaan kriteria).

2. Mencari vektor singgung $\xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ dari persamaan kriteria.

$$^{(n)}\eta = \xi h_x + \eta h_y + \sum_{i=1}^{n-1} {}^{(i)}\eta h_{y^{(i)}}$$

   dengan $^{(i)}\eta$ dapat dicari secara rekursif dengan $^{(i)}\eta = \frac{d(^{(i-1)}\eta)}{dx} - y^{(i)}\frac{d\xi}{dx}$ dan $n$ adalah orde dari persamaan diferensial

3. Membuat sistem persamaan diferensial partial untuk mencari koordinat kanonikal

$$r_x\xi + r_y\eta = 0 \quad ; \quad s_x\xi + s_y\eta = 1 \tag{5.1}$$

4. Mencari fungsi $r(x, y)$ dan $s(x, y)$ yang memenuhi persamaan (5.1). Sehingga didapatkan transformasi koordinat $(x, y) \to (r, s)$.

5. Buat persamaan diferensial dengan orde yang sama dengan persamaan diferensial pada koordinat awal.

6. Selesaikan persamaan diferensial dengan metode penyelesaian persamaan diferensial variabel terpisah untuk persamaan diferensial orde 1 dan reduksi orde untuk persamaan diferensial dengan orde yang lebih tinggi.

7. Lakukan kembali dari langkah 1 jika orde dari persaaman diferensial hasil reduksi orde lebih dari 1.

Dapat dilihat dari langkah 1 sampai 7, kita tidak menggolongkan persamaan diferensial berdasarkan bentuknya. Hal ini sesuai dengan apa yang diinginkan, yakni mencari metode penyelesaian persamaan diferensial biasa yang tidak bergantung pada bentuk dari persamaan diferensialnya.

Selain membahas mekanisme metode simetri, kita juga sudah membahas mengenai metode standar untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde 1, persamaan diferensial homogen, dan persamaan diferensial eksak dari perspektif metode simetri. Dari pembahasan bab 4, kita mendapatkan fungsi simetri dan koordinat kanonikal untuk persamaan diferensial linear orde 1 dan persamaan diferensial homogen secara umum. Hal ini dapat memverifikasi bahwa metode standar untuk persamaan diferensial linear orde 1 dan persamaan diferensial homogen benar atau valid menurut metode simetri. Hal menarik ditunjukan saat membahas metode standar penyelesaian persamaan diferensial eksak dari perspektif metode simetri. Kita mendapatkan cara untuk memilih pengali $\mu(x, y)$ sehingga persamaan diferensial biasa orde 1 menjadi bentuk persamaan diferensial eksak. Hal ini memperkaya pengetahuan kita tentang metode simetri untuk persamaan diferensial biasa orde 1. Sebelumnya kita mengira persamaan difensial bisa orde 1 $y' = h(x, y)$ hanya dapat ditransformasi ke bentuk persamaan diferensial variabel terpisah $ds/dr = f(r)$. Ternyata persamaan diferensial biasa orde 1 dapat juga di transformasi menjadi bentuk persamaan diferensial eksak

$$\frac{1}{\eta - \xi h(x, y)} dy = \frac{h(x, y)}{\eta - \xi h(x, y)} dx$$

sehingga kita dapat menyelesaikannya dengan metode standar untuk persamaan diferensial eksak.

## 5.2 Saran Untuk Penelitian Lebih Lanjut

Terlepas dari kelebihan metode simetri, metode ini juga memiliki beberapa kekurangan. Salah satunya adalah saat mencari vektor singgung $\xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ dari persamaan kriteria. Kita sudah mengetahui cara membuat persamaan kriteria. Persamaan ini akan semakin panjang dan kompleks, bergantung dari orde persamaan diferensialnya. Walaupun persamaan kriteria panjang dan kompleks, kita cukup menemukan sepasang vektor singgung $xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ saja. Disarankan saat mencari vektor singgung, kita mencoba mengasumsikan terlebih dahulu vektor singgung $\xi(x, y) = 0$. Dengan asumsi ini, kita akan mendapatkan persamaan kriteria yang lebih relatif lebih mudah untuk dikerjakan. Jika kita dapati vektor singgung yang memenuhi hanyalah $\eta(x, y) = 0$ maka asumsi $\xi_(x, y) = 0$ gugur. Artinya kita harus mencari vektor singgung $\xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ dengan membuat sistem persamaan diferensial parsial, seperti pada contoh di subbab 3.1.2. Kesulitan kedua adalah saat mencari koordinat kanonikal. Disarankan, saat mencari koordinat $s(x, y)$, kita tidak perlu mencari solusi homogennya. Hal ini dikarenakan, saat mencari koordinat $r(x, y)$, kita sebenarnya sudah mencari solusi homogen untuk koordinat $s(x, y)$.

Dari kedua kesulitan ini, kita dapat mengambil kesimpulan, yakni jika persamaan diferensial dirasa komplek namun kita mengetahui fungsi simetri dari persamaan diferensialnya, metode simetri sangat disarankan. Hal ini dikarenakan, saat kita mengetahui fungsi simetri dari persamaan diferensial artinya kita tidak perlu mencari vektor singgung $\xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ dari persamaan kriteria. Dengan kata lain, kesulitan pertama dapat teratasi. Namun jika persamaan diferensial dirasa kompleks, memiliki orde yang tinggi dan belum mengetahu fungsi simetrinya maka disarankan untuk tidak menggunakan metode ini.

# DAFTAR REFERENSI

[1] Granstöm, F. (2017) Symmetry methods and some nonlinear differential equations. Thesis. Karlstads Universitet, Sweden.

[2] Arrigo, D. J. (2015) *Symmetry Analysis of Differential Equations: An Introduction*, 1st edition. John Wiley  Sons, Inc., Hoboken.

[3] McInerney, A. (2013) *First Steps in Differential Geometry: Reimannian, Contact, Symplectic*. Springer-Verlag, Berlin.

[4] Sttarret, J. (2007) Solving differential equations by symmetry groups. *American Mathematical Monthly*, **114**, 778–792.

[5] Steinhour, R. (2013) The truth about lie symmetries: Solving differential equations with symmetry methods. *Senior Independent Study Theses*, **1**, 949.