

SKRIPSI

**PENENTUAN BATAS ATAS DAN BATAS BAWAH DARI
KUMPULAN RISIKO KLAIM ASURANSI DENGAN
KETIDAKPASTIAN KETERGANTUNGAN**



Vheren Xhalliwang

NPM: 2016710018

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2019**

FINAL PROJECT

**DETERMINING UPPER AND LOWER BOUNDS OF
AGGREGATE INSURANCE CLAIM RISKS WITH
DEPENDENCE UNCERTAINTY**



Vheren Xhalliwang

NPM: 2016710018

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2019**

LEMBAR PENGESAHAN

PENENTUAN BATAS ATAS DAN BATAS BAWAH DARI KUMPULAN RISIKO KLAIM ASURANSI DENGAN KETIDAKPASTIAN KETERGANTUNGAN

Vheren Xhalliwang

NPM: 2016710018

Bandung, 19 Desember 2019

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Pembimbing Pendamping

Farah Kristiani, M.Si.

Dr. Benny Yong

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Dr. Ferry Jaya Permana, ASAI

Dr. Erwinna Chendra

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Erwinna Chendra

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

PENENTUAN BATAS ATAS DAN BATAS BAWAH DARI KUMPULAN RISIKO KLAIM ASURANSI DENGAN KETIDAKPASTIAN KETERGANTUNGAN

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 19 Desember 2019

Meterai Rp. 6000

Vheren Xhalliwang
NPM: 2016710018

ABSTRAK

Sebagai usaha untuk mengurangi besarnya kerugian yang mungkin terjadi, perusahaan asuransi perlu mengetahui karakter dari kumpulan risiko klaim atas suatu portofolio polis yang ditanggung. Salah satu ukuran risiko yang sering digunakan adalah *Value-at-Risk*. Namun, karena VaR tidak dapat mendeskripsikan besarnya kerugian pada kondisi ekstrem, maka biasanya perusahaan asuransi menggunakan ukuran risiko lain, yaitu *Expected Shortfall*. Salah satu masalah yang sering dihadapi perusahaan asuransi adalah ketidakpastian ketergantungan antar risiko individual. Dengan demikian, perlu dicari batas atas dan batas bawah dari ukuran risiko yang menggambarkan struktur ketergantungan terbaik dan terburuk dari risiko individualnya. Batas-batas ini dapat diestimasi dengan menggunakan Algoritma Penyusunan Ulang yang diperkenalkan oleh Giovanni Puccetti dan Ludger Ruschendorf. Algoritma ini melakukan estimasi dengan menduga setiap kemungkinan struktur ketergantungan. Untuk membandingkan besarnya ukuran risiko atas suatu kumpulan klaim, estimasi dilakukan pada besar klaim individual yang mengikuti distribusi Eksponensial dan Pareto. Secara umum, jika besar klaim individual mengikuti distribusi Pareto, maka risiko kerugian yang mungkin dialami perusahaan asuransi lebih besar dibanding apabila besar klaim individual mengikuti distribusi Eksponensial. Setelah dilakukan analisa, dapat disimpulkan bahwa dimensi portofolio dan tingkat kepercayaan yang semakin besar mengakibatkan risiko kerugian juga semakin besar. Dengan membandingkan hasil estimasi dan analitik yang diperoleh, maka perusahaan asuransi dapat memperoleh gambaran besarnya modal yang aman untuk setiap portofolio polis yang ditanggung.

Kata-kata kunci: Risiko Klaim, *Value-at-Risk*, *Expected Shortfall*, Ketidakpastian Ketergantungan, Algoritma Penyusunan Ulang, Eksponensial, Pareto

ABSTRACT

As an effort to reduce the size of losses that might occur, insurance companies shall know the character of aggregate claim risks from each portfolio of policies covered. One of the widely used risk measures is Value-at-Risk. However, VaR cannot be used to describe the size of losses in extreme conditions, so insurance companies usually use Expected Shortfall as an alternative. One of the challenges that often faced by insurance companies is dependence uncertainty among individual risks. This uncertainty can be taken into account by establishing the lower bound and upper bound of the risk measures, to describe the best- and worst-case dependence scenarios. These bounds can be estimated by Rearrangement Algorithm, which is introduced by Giovanni Puccetti and Ludger Ruschendorf. This algorithm produces numerical estimates by inferring every possible dependence structure. As a comparison, the risk measures of aggregate claim are implemented to individual claim sizes that follow Exponential and Pareto distribution. Generally, if the individual claim sizes follow Pareto distribution, then the aggregate loss risk that might occur is larger compared to individual claim sizes that follow Exponential distribution. As a result of the analysis, it can be concluded that the greater the portfolio dimension and level of confidence, the greater the aggregate loss risk. By comparing the estimation and analytical values obtained, an insurance company can estimate the secure amount of capital for each portfolio of policies covered.

Keywords: Claim Risk, Value-at-Risk, Expected Shortfall, Dependence Uncertainty, Rearrangement Algorithm, Exponential, Pareto

only by His grace

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa untuk segala berkat dalam setiap langkah penyusunan skripsi hingga mampu menyelesaikan tepat pada waktunya. Skripsi yang berjudul "Penentuan Batas Atas dan Batas Bawah dari Kumpulan Risiko Klaim Asuransi dengan Ketidakpastian Ketergantungan" disusun sebagai salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi Strata-I Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan, Bandung. Penulis berharap skripsi ini bisa menjadi karya yang bermanfaat bagi setiap orang yang membacanya.

Selama masa studi dan penyusunan skripsi, penulis telah mendapatkan banyak ilmu dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

- Rushtam Marhansha (Papa), Elisabeth Then (Mama), Rafli Ekawangsha (Koko), *my biggest blessing. Thank you for the never-ending love and unconditional support throughout my whole life. I owe you a lot.*
- Ibu Farah Kristiani, M.Si. selaku dosen pembimbing utama yang telah dengan sabar meluangkan waktu untuk membimbing penulis, memberi arahan, didikan, dan saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
- Bapak Dr. Benny Yong selaku dosen pembimbing pendamping yang telah memberikan semangat, arahan, saran, dan bantuan dalam proses penyusunan skripsi ini.
- Bapak Dr. Ferry Jaya Permana, ASAI dan Ibu Dr. Erwinna Chendra selaku dosen penguji yang telah memberikan ilmu, saran, dan kritik sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik.
- Bapak Liem Chin, M.Si. selaku koordinator skripsi atas segala saran dan bantuan yang diberikan.
- Bapak Agus Sukmana, M.Sc. selaku dosen wali yang telah memberikan arahan dan bantuan selama masa perkuliahan.
- Seluruh dosen FTIS, terutama dosen Program Studi Matematika, terima kasih atas segala ilmu yang diberikan.
- Seluruh staf Tata Usaha dan karyawan FTIS. Terima kasih atas segala bantuan selama masa perkuliahan.
- Gracia Monica, Nathania Eveline, Natalia Maria, *the greatest companion of all time. Thank you for being my constant source of comfort since forever.*
- Olivia Bernadeth, Cynthia Tanudjaja, *the one(s) that I'm forever grateful for. Thank you for all the joys and for helping me grow in all aspects of life.*
- Alma Geraldine, Laureen Pamela, Jessica Christina, *my main source of support. Thank you for literally being there throughout my uni days and for making it a lot more meaningful and bearable.*

- Teman-teman Matematika 2016 *Thank you for all the supports and moments we shared together. I wish you all the best for the future. See you on top!*
- Teman-teman Matematika angkatan 2014, 2015, 2017, yang tak dapat disebutkan satu persatu.
- Semua pihak yang telah berjasa kepada penulis selama masa perkuliahan dan penyusunan skripsi.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan dan jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan masukan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca agar skripsi ini dapat menjadi lebih baik. Akhir kata semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan dapat dikembangkan menjadi karya yang lebih baik lagi.

Bandung, Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	5
2.1 Peubah Acak	5
2.1.1 Jenis Peubah Acak	5
2.1.2 Ekspektasi Peubah Acak	6
2.1.3 Variansi Peubah Acak	6
2.1.4 Fungsi Distribusi Gabungan Peubah Acak	7
2.1.5 Fungsi Kuantil	7
2.2 Jenis-Jenis Distribusi Besaran Klaim	8
2.2.1 Distribusi Eksponensial	8
2.2.2 Distribusi Pareto	9
2.3 Ukuran Risiko	11
2.3.1 <i>Value-at-Risk</i> (VaR)	12
2.3.2 <i>Expected Shortfall</i> (ES)	13
2.4 Urutan Konveks	14
3 METODE ESTIMASI BATAS ATAS DAN BATAS BAWAH DARI UKURAN RISIKO KUMPULAN	15
3.1 Model Kumpulan Risiko Klaim	15
3.2 Batas Atas dan Batas Bawah	16
3.3 Tersusun Secara Terbalik (<i>Opposite Order</i>)	16
3.4 Algoritma Penyusunan Ulang (<i>Rearrangement Algorithm</i>)	17
3.5 Batas untuk Nilai <i>Value-at-Risk</i> (VaR)	18
3.5.1 Batas Atas dari <i>Value-at-Risk</i> (VaR)	18
3.5.2 Batas Bawah dari <i>Value-at-Risk</i> (VaR)	21
3.6 Batas untuk nilai <i>Expected Shortfall</i> (ES)	23
3.6.1 Batas Atas dari <i>Expected Shortfall</i> (ES)	23
3.6.2 Batas Bawah dari <i>Expected Shortfall</i> (ES)	24
3.7 Batas Analitik dari <i>Value-at-Risk</i> dan <i>Expected Shortfall</i>	26

4	HASIL DAN ANALISA HASIL ESTIMASI	29
4.1	Data	29
4.2	Simulasi Hasil	30
4.2.1	Simulasi Estimasi Batas Atas <i>Value-at-Risk</i>	30
4.2.2	Simulasi Estimasi Batas Bawah <i>Value-at-Risk</i>	32
4.2.3	Simulasi Batas Atas <i>Expected Shortfall</i>	35
4.2.4	Simulasi Estimasi Batas Bawah <i>Expected Shortfall</i>	35
4.3	Analisa Hasil Estimasi	37
4.3.1	Analisa Sensitivitas Parameter	38
4.3.2	Analisa Perbandingan Hasil Estimasi	39
4.3.3	Analisa Pengaruh Titik Diskritisasi	40
5	KESIMPULAN DAN SARAN	43
5.1	Kesimpulan	43
5.2	Saran	43
	DAFTAR REFERENSI	45

DAFTAR GAMBAR

2.1	Fungsi Kepadatan Peluang dari Distribusi Eksponensial	9
2.2	Fungsi Kepadatan Peluang dari Distribusi Pareto	11
3.1	Iterasi Penyusunan Ulang pada Matriks Awal (A) dengan Menggunakan Algoritma Penyusunan Ulang	17
4.1	Fungsi Kepadatan Peluang dari Distribusi Eksponensial(1) dan Pareto(2)	29

DAFTAR TABEL

4.1	Matriks \mathbf{X}^α untuk Mengestimasi $\overline{VaR}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	31
4.2	Matriks $\underline{\mathbf{X}}^*$ untuk Mengestimasi $\overline{VaR}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	31
4.3	Matriks $\overline{\mathbf{X}}^*$ untuk Mengestimasi $\overline{VaR}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	32
4.4	Matriks \mathbf{X}^α untuk Mengestimasi $\underline{VaR}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	33
4.5	Matriks $\underline{\mathbf{Z}}^*$ untuk Mengestimasi $\underline{VaR}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	33
4.6	Matriks $\overline{\mathbf{Z}}^*$ untuk Mengestimasi $\underline{VaR}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	34
4.7	Matriks \mathbf{X}^α untuk Mengestimasi $\underline{ES}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	35
4.8	Matriks $\underline{\mathbf{X}}^*$ untuk Mengestimasi $\underline{ES}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	36
4.9	Matriks $\overline{\mathbf{X}}^*$ untuk Mengestimasi $\underline{ES}_\alpha(S)$ dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	37
4.10	Analisa Parameter d dan α terhadap Batas Atas dan Batas Bawah VaR dan ES	38
4.11	Analisa Perbandingan Estimasi Batas Atas dan Batas Bawah Nilai <i>Value-at-Risk</i> dengan $X_j \sim \text{Ekspensial}(1)$	39
4.12	Analisa Perbandingan Estimasi Batas Atas dan Batas Bawah Nilai <i>Value-at-Risk</i> dengan $X_j \sim \text{Pareto}(2)$	39
4.13	Analisa Perbandingan Estimasi Batas Bawah Nilai <i>Expected Shortfall</i>	40
4.14	Analisa Pengaruh Titik Diskritisasi terhadap Estimasi Batas Bawah Nilai <i>Expected Shortfall</i>	40

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada kenyataannya, setiap perjalanan hidup maupun bisnis yang dijalankan, tidak selalu sesuai dengan apa yang diharapkan. Banyak biaya maupun kerugian tak terduga yang harus dikeluarkan pada masa yang akan datang. Dengan demikian, setiap individu maupun institusi akan selalu berusaha untuk mengurangi atau menghilangkan risiko tersebut. Salah satu usaha yang dilakukan adalah dengan mengalihkan risiko tersebut kepada pihak lain, yaitu perusahaan asuransi.

Sebagai lembaga pengambil alih dan penerima risiko, perusahaan asuransi perlu menanggung risiko berupa klaim dari pihak tertanggung, yaitu ganti rugi atas suatu risiko kerugian yang dialami oleh pihak tertanggung [1]. Secara khusus, perusahaan asuransi umum menawarkan berbagai jenis produk asuransi, seperti asuransi properti, asuransi kendaraan bermotor, asuransi kecelakaan, asuransi kesehatan, dan sebagainya. Dengan semakin banyak dan beragamnya produk yang dimiliki, maka perusahaan asuransi perlu mengenali karakter risiko dari setiap portofolio polis homogen yang besar. Hal ini diperlukan guna mengelola kumpulan risiko klaim dari setiap portofolio polis yang ditanggung oleh perusahaan. Setiap karakter kumpulan risiko klaim yang ditanggung dapat dikenal melalui model kumpulan risiko klaim individual [2].

Dari model kumpulan risiko klaim individual, perusahaan asuransi perlu menggunakan ukuran risiko tertentu dalam mengelola kumpulan risiko klaim yang ditanggungnya. Berdasarkan [3], ukuran risiko biasanya digunakan oleh perusahaan sebagai alat untuk membatasi besarnya risiko individual yang boleh ditanggung oleh perusahaan. Selain itu, perusahaan juga dapat menentukan besarnya modal yang harus disiapkan perusahaan apabila terjadi kerugian yang tidak terduga di masa yang akan datang. Dengan kata lain, perusahaan dapat menentukan besarnya premi yang sesuai dengan besarnya risiko klaim dari calon tertanggung. Salah satu ukuran risiko yang paling sering digunakan adalah *Value-at-Risk* (VaR). Namun karena *Value-at-Risk* (VaR) tidak dapat menggambarkan besarnya kerugian pada kondisi ekstrem, maka ukuran risiko lainnya yang biasanya digunakan oleh perusahaan asuransi adalah *Expected Shortfall* (ES). Kedua ukuran risiko ini dapat diperoleh apabila diketahui fungsi distribusi dari penjumlahan variabel-variabel acak yang menyatakan besaran risiko individualnya.

Untuk memperoleh distribusi gabungan dari kumpulan risiko, model kumpulan risiko klaim individual biasanya mengasumsikan risiko-risiko individual dari suatu portofolio adalah saling bebas [4]. Salah satu alasannya adalah Hukum Bilangan Besar yang menyatakan bahwa dengan semakin meningkatnya jumlah risiko yang dipertanggungkan dan dengan asumsi setiap risiko individual saling bebas dan berdistribusi identik, maka rata-rata risiko kumpulannya semakin dapat diprediksi. Meskipun asumsi saling bebas ini memberikan penyederhanaan dalam perhitungan matematis, namun pada praktiknya hal ini kurang relevan. Pada kenyataannya, ada juga risiko-risiko individual yang tidak saling bebas atau terdapat ketergantungan antar risiko individualnya. Apabila terdapat ketergantungan antar risiko individual, perusahaan asuransi akan sulit dalam menentukan nilai *Value-at-Risk* dan *Expected Shortfall* untuk risiko kumpulan. Hal ini disebabkan karena pada umumnya perusahaan asuransi hanya memiliki informasi mengenai distribusi marjinal dari setiap risiko, sedangkan distribusi gabungan yang menyatakan struktur ketergantungan antar

risiko individualnya tidak diketahui [4]. Solusi yang dapat dilakukan adalah dengan mencari setiap kemungkinan struktur ketergantungan dan memperhitungkan rentang dari ukuran risikonya [5].

Pada skripsi ini akan digunakan Algoritma Penyusunan Ulang (*Rearrangement Algorithm*) yang diperkenalkan oleh Giovanni Puccetti dan Ludger Ruschendorf. Metode ini dapat menduga struktur ketergantungan terbaik dan terburuk antar risiko individual, sehingga dapat diperoleh estimasi numerik terhadap batas bawah dan batas atas dari nilai *Value-at-Risk* dan *Expected Shortfall*. Metode ini didasarkan pada ide bahwa ketergantungan antar risiko individualnya harus diminimalkan. Menurut [6], metode ini memberikan perhitungan yang cepat dan berguna.

1.2 Rumusan Masalah

Pada skripsi ini akan diperhitungkan besarnya risiko kumpulan dimana distribusi marjinal dari risiko individualnya diketahui, namun struktur ketergantungan antar risikonya tidak diketahui. Oleh karena itu, masalah yang dirumuskan pada skripsi ini adalah sebagai berikut

1. Bagaimana cara menentukan batas bawah (*best-case value*) dan batas atas (*worst-case value*) nilai *Value-at-Risk* (VaR) dari suatu kumpulan risiko klaim?
2. Bagaimana cara menentukan batas bawah (*best-case value*) dan batas atas (*worst-case value*) nilai *Expected Shortfall* (ES) dari suatu kumpulan risiko klaim?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah pada Subbab 1.2, tujuan yang ingin dicapai pada skripsi ini adalah:

1. Menentukan batas bawah (*best-case value*) dan batas atas (*worst-case value*) nilai *Value-at-Risk* (VaR) dari suatu kumpulan risiko klaim.
2. Menentukan batas bawah (*best-case value*) dan batas atas (*worst-case value*) nilai *Expected Shortfall* (ES) dari suatu kumpulan risiko klaim.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada skripsi ini adalah:

1. Diasumsikan distribusi marjinal dari risiko individual diketahui, namun struktur ketergantungannya tidak diketahui.
2. Dari suatu kumpulan risiko, setiap risiko individualnya berdistribusi identik.
3. Kumpulan risiko klaim asuransi diasumsikan untuk jenis asuransi yang seragam.

1.5 Sistematika Pembahasan

Pembahasan skripsi ini terdiri dari lima bab, yaitu:

Bab 1: Pendahuluan

Bab ini berisi penguraian tentang hal-hal yang melatarbelakangi skripsi ini. Bab ini terdiri dari lima subbab, yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, dan sistematika pembahasan.

Bab 2: Landasan Teori

Bab ini membahas teori-teori dasar yang mendukung skripsi ini, antara lain peubah acak, jenis-jenis

distribusi besaran klaim, ukuran risiko, dan urutan konveks.

Bab 3: Metode Estimasi Batas Atas dan Batas Bawah dari Ukuran Risiko Kumpulan

Bab ini menguraikan tentang model kumpulan risiko klaim dan Algoritma Penyusunan Ulang (*Rearrangement Algorithm*) yang digunakan untuk mengestimasi batas atas dan batas bawah dari *Value-at-Risk* dan *Expected Shortfall*. Lalu dibahas nilai analitik dari batas atas dan batas bawah sebagai nilai pembanding.

Bab 4: Hasil dan Analisa Hasil Estimasi

Bab ini berisi data yang digunakan, simulasi hasil batas atas dan batas bawah untuk *Value-at-Risk* dan *Expected Shortfall*. Selanjutnya dilakukan analisa terhadap hasil estimasi yang diperoleh.

Bab 5: Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari skripsi ini dan saran untuk penelitian selanjutnya.