

SKRIPSI

**ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT
TUBERKULOSIS PARU DENGAN MENGGUNAKAN
FUNGSI LYAPUNOV**



Mona Krisdayanti Sihaloho

NPM: 2015710018

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2019**

FINAL PROJECT

**STABILITY ANALYSIS OF LUNG TUBERCULOSIS
EPIDEMIC USING LYAPUNOV FUNCTION**



Mona Krisdayanti Sihaloho

NPM: 2015710018

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2019**

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS PARU DENGAN MENGGUNAKAN FUNGSI LYAPUNOV

Mona Krisdayanti Sihaloho

NPM: 2015710018

Bandung, 5 Desember 2019

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Iwan Sugiarto, M.Si.

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Dr. Benny Yong

Liem Chin, M.Si.

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Erwinna Chendra

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS PARU DENGAN MENGGUNAKAN FUNGSI LYAPUNOV

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 5 Desember 2019

Meterai Rp. 6000

Mona Krisdayanti Sihaloho
NPM: 2015710018

ABSTRAK

Tuberkulosis (TB) adalah suatu penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Tuberculosis (Mtb)* yang dikenal dengan basil tahan asam (BTA) positif yang bisa menimbulkan gangguan pada saluran pernafasan. Indonesia merupakan salah satu negara dengan kasus penyakit TB terbesar. Tugas akhir ini berkonsentrasi pada penyakit TB paru dan membahas model matematika masalah penyebaran penyakit TB paru. Model matematika ini melibatkan individu rentan, individu terinfeksi yang belum dapat menularkan, individu terinfeksi yang sudah dapat menularkan, individu yang sedang melakukan pengobatan dan individu yang dapat kambuh kembali. Pada model ini, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Simulasi numerik juga menunjukkan sistem akan menuju titik kesetimbangan untuk jangka waktu tertentu. Analisis kestabilan titik kesetimbangan menggunakan fungsi Lyapunov bersifat stabil asimtotik global. Analisis sensitivitas model juga dilakukan, dengan hasil laju penularan oleh individu terinfeksi dan laju perpindahan individu terinfeksi untuk melakukan pengobatan adalah parameter yang paling berpengaruh terhadap penyebaran penyakit TB paru.

Kata-kata kunci: Tuberkulosis, tuberkulosis paru, basil tahan asam (BTA) positif, fungsi Lyapunov, titik kesetimbangan, kestabilan

ABSTRACT

Tuberculosis is an infectious disease infected by *Mycobacterium Tuberculosis* (*MTb*) known as positive basil tahan asam (BTA) that can cause interference with the respiratory tract. Indonesia is one of the countries with the biggest TB cases. This final project will concentrate on lung TB disease and discuss about lung tuberculosis epidemics model. The mathematical model consists of susceptible individuals, latent individuals, infectious individuals, treated individuals and relapse individuals. In this model, there are two equilibrium points for disease-free and endemic condition. The numerical simulation shows the system is going to the equilibrium point for a certain period of time. The stability analysis by using Lyapunov function shows that all the equilibrium points have global asymptotic stability. The sensitivity analysis shows the transmission rate of infectious individuals and transfer rate of infectious individuals for diagnosis and drug treatment is the most influential parameters of the spread of lung tuberculosis disease.

Keywords: Tuberculosis, lung tuberculosis, positive basil tahan asam (BTA), Lyapunov function, equilibrium point, stability

Untuk bapak, mamah, Yuni dan Yaldi yang saya cintai...

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas berkat dan kemurahanNya yang melimpah serta kekuatan yang terus diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Kestabilan Penyebaran Penyakit Tuberkulosis Paru dengan menggunakan Fungsi Lyapunov". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi strata-1, Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan Bandung. Penulis berharap skripsi ini dapat berguna bagi setiap orang yang membacanya.

Selama masa perkuliahan, penulis telah banyak mendapatkan ilmu, pelajaran, pengalaman dan kebahagiaan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terimakasih kepada:

- Bapak, mamah, Yuni dan Yaldi yang selalu mendukung, mendoakan, dan memberi nasihat kepada penulis dari awal sampai akhir masa perkuliahan.
- Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah sabar membimbing penulis, memberikan ilmu, arahan, saran yang bermanfaat serta semangat sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
- Bapak Dr. Benny Yong selaku Dosen Penguji, juga Bapak Liem Chin, M.Si. selaku Dosen Penguji dan Koordinator Skripsi. Terima kasih atas waktu dan saran yang diberikan untuk penulis dalam perbaikan dan pengembangan skripsi ini.
- Seluruh Dosen FTIS khususnya Dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu dan ajarannya kepada penulis selama masa perkuliahan.
- Seluruh Staf Tata Usaha FTIS yang telah membantu penulis dalam mengumpulkan syarat kelengkapan wisuda dan semua proses kelengkapan data dalam perkuliahan penulis.
- Seluruh Pegawai FTIS, terima kasih atas bantuannya ketika penulis membutuhkan logistik, serta menjadikan ruang perkuliahan nyaman, rapi, dan bersih.
- Alan Nainggolan yang selalu mendukung, mendoakan dan menjadi penyemangat serta tempat berkeluh kesah penulis selama masa perkuliahan. Walaupun jarak jauh, terima kasih atas waktu dan kebahagiaan yang selalu diberikan.
- Charisma Riyan Etta sebagai teman seperjuangan untuk setiap doa, nasihat, waktu dan ajaran-ajaran yang telah diberikan. Kita sudah lulus Ma!
- dr. Margaret Yosephine E. Silaen yang telah memberikan informasi mengenai ilmu kedokteran serta doa dan semangatnya kepada penulis.
- Raka, Daud, Aryo, Mahe, Nadya dan Gresel. Terima kasih atas waktu dan kebersamaannya selama pengerjaan skripsi.
- Teman-teman Matematika Unpar 2015 yang telah menjadi keluarga yang kompak dan selalu membangun satu sama lain, serta pengalaman hidup selama menempuh studi di Unpar.

- Gabriella Sihombing, kak Desi Sihaloho, kak Chindy Hutagalung, Lela Napitupulu, Mega Silaen, dan bang Joel Gurning yang menjadi tempat berkeluh kesah penulis. Terima kasih atas hiburan yang selalu kalian lakukan!
- Teman-teman sepelayananku Naposo HKBP Bandung Riau Martadinata serta Pengurus HKBP Distrik XVIII Jabartengdiy atas setiap doa, dukungan dan hiburan yang diberikan kepada penulis.

Bandung, Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	5
2.1 Penyakit Tuberkulosis Paru	5
2.2 Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu	6
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu	6
2.4 Titik Kesetimbangan	7
2.5 Model Epidemik SIR	8
2.6 Bilangan Reproduksi Dasar dengan Menggunakan Matriks Generasi	9
2.7 Fungsi Lyapunov	10
2.8 Ketaksamaan AM-GM	11
3 ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA EPIDEMIK TUBERKULOSIS PARU	13
3.1 Kompartemen Model	13
3.2 Titik Kesetimbangan Model Matematika	17
3.3 Bilangan Reproduksi Dasar	20
3.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan	22
3.4.1 Kestabilan asimtotik global untuk titik kesetimbangan bebas penyakit	22
3.4.2 Kestabilan asimtotik global untuk titik kesetimbangan endemik	23
4 SIMULASI NUMERIK	27
4.1 Simulasi untuk $R_0 < 1$	27
4.2 Simulasi untuk $R_0 > 1$	29
4.3 Analisis Sensitivitas	31
4.3.1 Pengaruh Parameter Laju Penularan oleh Individu Terinfeksi Jenis 1	32
4.3.2 Pengaruh Parameter Laju Penularan oleh Individu Terinfeksi Jenis 2	33
4.3.3 Pengaruh Parameter Laju Perpindahan Individu Terinfeksi Jenis 1 untuk Melakukan Pengobatan	33
4.3.4 Pengaruh Parameter Laju Perpindahan Individu Terinfeksi Jenis 2 untuk Melakukan Pengobatan	34

5	SIMPULAN DAN SARAN	37
5.1	Simpulan	37
5.2	Saran	37
	DAFTAR REFERENSI	39
A	PENURUNAN RUMUS V	41

DAFTAR GAMBAR

2.1	Diagram kompartemen model SIR	9
3.1	Diagram kompartemen model matematika penyebaran TB Paru	14
4.1	Simulasi model dengan 3 syarat awal saat $R_0 = 0,98$	28
4.2	Simulasi model dengan 3 syarat awal saat ($R_0 = 1,44$)	30
4.3	Pengaruh β_1 terhadap individu terinfeksi jenis 1 (a) dan jenis 2 (b)	32
4.4	Pengaruh β_2 terhadap individu terinfeksi jenis 1 (a) dan jenis 2 (b)	33
4.5	Pengaruh γ_1 terhadap individu terinfeksi jenis 1 (a) dan jenis 2 (b)	34
4.6	Pengaruh γ_2 terhadap individu terinfeksi jenis 1 (a) dan jenis 2 (b)	34

DAFTAR TABEL

4.1	Nilai parameter untuk $R_0 < 1$	27
4.2	Syarat awal	28
4.3	Nilai parameter untuk $R_0 > 1$	29
4.4	Nilai indeks sensitivitas terhadap parameter ketika $R_0 > 1$	31

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit menular adalah penyakit yang disebabkan oleh banyak hal salah satunya seperti bakteri yang bisa ditularkan dari satu orang penderita kepada orang sehat atau belum terkena penyakit. Bakteri adalah organisme bersel satu yang hidup di tanah, air, udara hingga di dalam tubuh setiap manusia dan hewan. Kebanyakan bakteri tidak berbahaya bahkan bermanfaat untuk kesehatan. Misalnya adalah *Escherichia coli* yang berfungsi untuk membantu membusukkan sisa-sisa pencernaan makanan di usus besar sehingga terbentuk feses. Namun beberapa bakteri menjadi biang keladi penyebab penyakit menular. Beberapa contoh seperti cacar, hepatitis serta tuberkulosis.

Tuberkulosis adalah suatu penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Tuberculosis (MTb)* yang dikenal dengan juga dengan basil tahan asam (BTA) positif yang bisa menimbulkan gangguan pada saluran pernafasan. Sampai dengan saat ini TB merupakan salah satu masalah kesehatan masyarakat di dunia. Setiap detik ada satu orang yang terinfeksi TB di dunia ini dan sepertiga penduduk dunia telah terinfeksi bakteri TB. Jumlah terbesar kasus TB terjadi di Asia Tenggara yaitu 33% dari seluruh kasus TB di dunia, namun bila dilihat dari jumlah penduduk terdapat 182 kasus per 100.000 per penduduk. Indonesia merupakan salah satu negara yang mempunyai beban TB yang terbesar setelah India dan China. Berdasarkan Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, jumlah kasus baru TB di Indonesia sebanyak 420.994 pada tahun 2017 (data per 17 Mei 2018). Berdasarkan jenis kelamin adalah 58,28% penderita laki-laki dan 41,72% penderita perempuan yang artinya penderita laki-laki 1,4 kali lebih banyak dibanding penderita perempuan. Hal ini mungkin terjadi karena laki-laki lebih terpapar pada faktor risiko TB misalnya merokok dan kurangnya ketidapatuhan minum obat[1]. Sekitar 75% penderita TB adalah kelompok usia yang paling produktif secara ekonomis yaitu 15-50 tahun. Diperkirakan seorang penderita TB dewasa akan kehilangan rata-rata waktu kerjanya 3-4 bulan. Hal tersebut berakibatkan pada kehilangan pendapatan tahunan rumah tangganya sekitar 20%-30%. Selain merugikan secara ekonomis, TB juga memberikan dampak buruk lainnya secara sosial seperti dikucilkan oleh lingkungan masyarakat.

Penyakit TB biasanya menyerang paru-paru, namun juga bisa berdampak pada bagian tubuh lainnya. Dari 100% penderita TB sekitar 80% adalah penderita TB paru dan 20% lainnya adalah penderita TB extra paru seperti TB tulang, TB kelenjar dan TB lainnya. Dalam skripsi ini akan berkonsentrasi pada penyakit TB paru. Penyakit TB paru terjadi ketika daya tahan tubuh menurun. Gejala utama penderita TB paru yaitu batuk berdahak dan diikuti dengan gejala tambahan yaitu dahak bercampur darah, batuk darah, sesak nafas, badan lemas, nafsu makan menurun, berat badan menurun, malaise, berkeringat malam hari tanpa kegiatan fisik dan demam meriang lebih dari satu bulan. Dalam perspektif epidemiologi, TB paru terjadi karena adanya interaksi penjamu (*host*), penyebab (*agent*) dan lingkungan (*environment*). Pada sisi penjamu, kerentanan terhadap infeksi bakteri *Mycobacterium Tuberculosis (MTb)* sangat dipengaruhi oleh daya tahan tubuh seseorang pada saat itu [2].

Langkah awal pencegahan penyakit TB paru bisa dimulai dengan membudayakan perilaku hidup bersih dan sehat, membudayakan perilaku etika saat batuk dan melakukan pemeliharaan lingkungan

dengan standar rumah sehat. Adapun pengendalian penyakit TB paru dapat dilakukan dengan melakukan pengobatan seperti peningkatan daya tahan tubuh dan penanganan penyakit penyerta TB [1]. Pada skripsi ini akan dibentuk model matematika untuk penyakit TB paru. Model matematika yang akan digunakan adalah model $SL_1I_1TL_2I_2$. Model matematika tersebut diharapkan bisa membantu untuk memahami penyebaran penyakit tuberkulosis paru yang kompleksitasnya cenderung meningkat serta akan dicari titik kesetimbangan sistem, bilangan reproduksi dasar dan kestabilan sistem dari model penyebaran penyakit TB paru.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana perumusan model matematika untuk penyebaran penyakit tuberkulosis paru?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan sistem?
3. Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar sistem?
4. Bagaimana analisis kestabilan sistem dari titik kesetimbangan sistem?
5. Apa parameter yang paling berpengaruh dalam penyebaran penyakit tuberkulosis paru?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini antara lain:

1. Merumuskan model matematika untuk penyakit tuberkulosis paru.
2. Mencari titik kesetimbangan sistem.
3. Menentukan bilangan reproduksi dasar melalui matriks generasi.
4. Menganalisis kestabilan sistem dari model epidemik tuberkulosis paru.
5. Menganalisis parameter yang paling berpengaruh dalam model penyebaran tuberkulosis paru.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

1. Setiap kelompok individu, terdapat individu yang meninggal secara alami.
2. Terdapat individu terinfeksi yang dapat meninggal karena penyakit tuberkulosis paru.
3. Terdapat beberapa individu terinfeksi yang sembuh secara spontan karena daya tahan tubuh yang kuat.

1.5 Sistematika Pembahasan

Pembahasan dalam skripsi ini meliputi:

BAB 1: Pendahuluan

Pada bab ini akan dipaparkan latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah dan sistematika penulisan.

BAB 2: Landasan Teori

Bab ini meliputi materi-materi yang akan digunakan sebagai teori pendukung dalam pembahasan pada bab-bab selanjutnya. Materi yang akan dibahas pada bab ini antara lain adalah penyakit tuberkulosis paru, persamaan diferensial tak linear orde satu, sistem persamaan diferensial tak linear orde satu, titik kesetimbangan, model epidemik SIR, bilangan reproduksi dasar dengan menggunakan matriks generasi, fungsi Lyapunov dan ketaksamaan AM-GM.

BAB 3: Analisis Kestabilan Model Matematika Epidemik Tuberkulosis Paru

Bab ini berisikan pembahasan mengenai model matematika penyakit tuberkulosis paru, titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar dan kestabilan sistem.

BAB 4: Simulasi Numerik

Pada bab ini akan membahas mengenai simulasi numerik pada model dan analisis sensitivitas untuk menentukan parameter yang paling berpengaruh terhadap penyebaran penyakit TB paru.

BAB 5: Simpulan dan Saran

Pada bab terakhir berisi kesimpulan yang diperoleh dari bab-bab sebelumnya dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.